Donc les racines cubiques de $4\sqrt{2}(-1+i)$ sont :

$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $z_1 = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

● $\theta \in]0,\pi[$

$$\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)+i\sin\theta}{[(1-\cos\theta)-i\sin\theta].[(1-\cos\theta)+i\sin\theta]}$$

$$= \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{[1-\cos\theta]^2+[\sin\theta]^2} = \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{2(1-\cos\theta)} + i\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\left[1-(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})\right]} = \frac{1}{2} + i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{2}(1+i\cot g\frac{\theta}{2}) \ ,\theta \in]0,\pi[} \ (**)$$

● $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i).z^3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2z-1}{z}\right)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) = u$$

d'après la question 1) on aura :

$$\frac{2z-1}{z} = z_k \Leftrightarrow z = \frac{1}{2-z_k}$$

D'où les solutions de l'équation (E) sont

- $z_0' = \frac{1}{2-z_0} = \frac{1}{2-2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Remplacer $\theta par \frac{\pi}{4} dans$ (**)

$$\Longrightarrow \boxed{z_0' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{\pi}{8})}$$

- $z_1' = \frac{1}{2-z_1} = \frac{1}{2-2e^{i\frac{11\pi}{12}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{i\frac{11\pi}{12}}}$

Remplacer $\theta par \frac{11\pi}{12} dans$ (**)

$$\Longrightarrow \boxed{z_1' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{11\pi}{24})}$$

- $z_2' = \frac{1}{2-z_2} = \frac{1}{2-2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{i\frac{19\pi}{12}}}$

Remplacer $\theta par \frac{19\pi}{12} dans$ (**)

$$\Longrightarrow z_2' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{19\pi}{24})$$

Exercice n° 17

: rectifier $\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3})$

● a) $\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3})$, on a

- $|1+i| = \sqrt{2}$

Soit θ un argument de 1 + i : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ Par suite $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$

$1+i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $\lambda = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}$

$$\Longrightarrow \lambda = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})}$$

b) Déterminons l'écriture cartésienne de λ :

$\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3}) = 1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}$

$\lambda = 1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$

Donc $\boxed{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$

● • $z^3 = a \Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z_k = re^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2\sqrt{2}$

et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 2\sqrt{2}$ Signifie r =

Donc les racines cubiques de a sont :

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Qarray.tn -Aqra Bech- Qarray.tn -Aqra Bech- Qarray.tn